トレーダーの投資行動原理による遅れ付きvan der Pol型株価変動モデル(経済物理学とその周辺,統計数理研究所研究会共同研究集会,経済物理学2009-ミクロとマクロの架け橋-,京都大学基礎物理学研究所2009年度前期研究会,研究会報告)

AUTHOR(S):

山下, 隆

トレーダーの投資行動原理による遅れ付きvan der Pol型株価変動モデル

年金積立金管理運用独立行政法人　山下　隆 [1]

1 株価変動メカニズムのモデル化

株価はなぜ変動するか？ Louis Bachelier に始まる株価変動のモデル化の歴史は長く、一世紀を超えるが、その多くは、変動の不確実性を単純な幾何ブラウン運動で表現している。しかし、株式市場は、多くのトレーダーにより構成されていることから、それぞれの投資行動の総和が価格変動として出現すると考えることで、ダイナミックなモデルを作ることができる。本研究ではこの考え方に基づき、遅れ付きの van der Pol 型自励振動子モデルを導いた [1, 2]。

2 遅れ付きvan der Polモデル

株式市場を構成する市場参加者であるトレーダーの投資行動原理は何だろうか。トレーダーの究極的な目的は利益の追求であり、そのために株価の先行きを予測しようとする。まず、株価が何に反応して変化するか考えよう。株価は、該当企業の価値を表したものであり、財務状況やそれを取り巻く経済、株式を保有する市場参加者の諸状態に依存して変動する。これらに関する情報の多くはランダムに発生し、あらかじめその内容を正確に予測することはできない。トレーダーはランダムに発生するこれらの情報によって、その相場観を変化させると仮定する。次に、これらの情報とトレーダーの関係について考えよう。これらの情報の大半は市場参加者の中に偏在しており、かつその正確さは保証されていない。市場にはいわゆる「情報の非対称性」[3] が存在する。このような状況のもとで、トレーダーが自己の利益を追求するための効率的な手段は、自分以外の市場参加者の、「多くの情報を総合的に解釈した結果としての相場観」を情報として用いることである。このため、トレーダーは市場参加者の多数意見に沿って自己の相場観を変動させる (この行為はしばしば「市場参加者の集団行動」として観察される [4]) と仮定する。株価は、このような外部情報によってだけ変動するのだろうか？各トレーダーの相場観が、自己の諸状態に依存すると考えることは自然である。その最も重要な要素は自己の持つ株式ポジションである。トレーダーの利益は、自己のポジションを解消することで確定する。すなわち、買いポジションの場合は売り、売りポジションの場合は買い圧力が市場に加わり、それらの圧力が株価を変化させる。彼らの利益を確定させようとする投資行動は株価に反映され、それが彼らの投資行動にフィードバックされると仮定する。この時重要な事は、彼らの追及する

[1]E-mail: tak20mt06@gmail.com

利益は、自己の持つ株式の簿価と時価との差に依存しているということであり、参照価格 (reference price) は彼らの持つそれぞれのポジションの簿価となる。以上のアイデアを、トレーダーの持つ単純な次の三つにルール化した。

1 mutation rule: トレーダーの相場観は、強気 (bulish) から弱気 (bearish)、またはその逆に、確率 m でランダムに変化する。

2 majority rule: トレーダーの相場観は、周囲のトレーダーとの多数決原理に従って変化する。N 人の市場参加者の中から、ランダムにピックアップしてきた小グループの相場観を突き合わせ、少数意見の者の相場観が多数派に合わせて反転する。このとき、反転した人数単位の価格変化圧力が発生する。ピックアップ人数 $(=p)$ は 3 人とする。

3 feed back rule: トレーダーの保有するポジションの簿価と、時価の差に応じた価格変化圧力が株価に加えられる。この圧力は、買いポジションを保有する場合は、利食い売りをしようとする等、負のフィードバック圧力となる。利食い圧力の強さは、単純に時価と簿価の価格差にリニアに比例する。その比例係数を ν とする。

更に、トレーダーの株式保有期間を u とし、その調達レートを g(ファイナンスではこの調達レートのことを capital cost と呼ぶ) とする。以上のルールを元に、強気・弱気トレーダーの数をそれぞれ N_+、N_- として、時点 $s \to s+1$ での強気トレーダーの数 N_+ および価格 S の変化それぞれの期待値を求めると、

$$
\begin{aligned}
E\left[\frac{N_+(s+1)-N_+(s)}{\tau N}\right] &= m\left\{-\frac{N_+(s)}{N}+\frac{N_-(s)}{N}\right\} \\
&\quad + 3\frac{N_+(s)\left(N_+(s)-1\right)N_-(s)}{N(N-1)(N-2)} - 3\frac{N_+(s)N_-(s)\left(N_-(s)-1\right)}{N(N-1)(N-2)} \\
&\quad - \nu\left(\frac{S(s)}{N}-\frac{S(s-u)}{N}\right)e^{gu} && \text{(1a)} \\
E\left[\frac{S(s+1)-S(s)}{\tau N}\right] &= 3\frac{N_+(s)(N_+(s)-1)(N_+(s)-2)}{N(N-1)(N-2)} + 3\frac{N_+(s)(N_+(s)-1)N_-(s)}{N(N-1)(N-2)} \\
&\quad - 3\frac{N_-(s)(N_-(s)-1)N_+(s)}{N(N-1)(N-2)} - 3\frac{N_-(s)(N_-(s)-1)(N_-(s)-2)}{N(N-1)(N-2)} && \text{(1b)}
\end{aligned}
$$

これらを十分に大きな数 N のもと、適当な時間スケール τ で、$N_+(s)-N/2 \to x_k$、$S(s)/N \to y_k$ として決定論的な連続化を施すと、

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}x_k &= -2mx_k + 3\times 2x_k\left(\frac{1}{2}+x_k\right)\left(\frac{1}{2}-x_k\right) - \nu(y_k - y_{k-u})e^{ug} && \text{(2a)} \\
&= -2\left(m-\frac{3}{4}\right)x_k - 6x_k^3 - \nu(y_k - y_{k-u})e^{ug} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}y_k &= 3\times 2x_k && \text{(2b)}
\end{aligned}
$$

となる。このシステムは、工学分野、特に電気振動の研究で知られる van der Pol システムであり、フィードバック項に遅れが付いている。van der Pol システムは、加えられた外力を、負抵抗の摩擦力により周期運動に変換してその振幅を増幅する自励振動子である。

van der Pol システムは Hopf 分岐することが知られている。その条件は、遅れの無いシステムの場合は不動点周りの漸近安定性分析により容易に求められて、$m = 3/4$ で Hopf 分岐を起こすことがわかる。このシステムは $m < 3/4$ では不動点周りの、不動点から離れようとする解の流れの領域 (負性抵抗領域) とその周囲の、不動点に近づく流れの領域との境界で limit cycle を作る。一方、$m > 3/4$ では負性抵抗の領域が消失し、時間の経過とともに振幅が減衰して振動が止まってしまう。遅れの無い van der Pol システムのこの性質は初期値に依存しないが、遅れ付きシステムの場合は、システムが記憶している過去の価格、すなわち簿価がヒステリシス効果を及ぼし、解を流す相平面を揺り動かすため、再び振動が励起される。

3 van der Pol システムによる市場解釈

標準的なファイナンス理論では、市場は効率的であり、株価は幾何ブラウン的に変動し、その時系列情報には何らの利用価値もないとされる。これは、株価の将来予測をするために過去の株価推移を分析する事は無意味な行為であることを意味している。しかし、過去の価格から将来の価格を予想しようとする、少なくない数のトレーダーが存在する。彼らはテクニカル分析と呼ばれる手法を用いる。その代表が、過去の価格パターンからの類推で将来の株価を予測しようとするチャート分析である。代表的な価格パターンが、トレンドとくさび状の価格パターンである。トレンドは価格の方向性であり、これ自体がトレーダーの予測対象であるとも言える。くさび状の価格パターンは我が国では「三角もち合い」と呼ばれており、価格がくさび状に行き詰る頂点付近において、ジャンプすることの兆しとして重視される。

これらの価格パターンは、今回得られた van der Pol システム (2) で説明することができる。m は、トレーダーの相場観がランダムに変異する確率であり、トレーダーの相場の先行き予測に対する確信の強さと解釈することができる。トレーダーの相場の先行き予測についての確信が弱い場合、彼らの相場観は容易に揺れ動き、その投資行動の結果である市場展開は不安定なものとなるであろう。m の大小によるシステム挙動の解釈は、この仮説に合致している (図 1 参照)。すなわち、m が大きい (確信が弱い) 場合、$3/4 < m \leq 1$ の時は、くさび状に解軌道の振幅が減衰していくが、保有期間 u のサイクルで簿価がシステムの相平面を移動させ、再び振動が始まる。この移動は過去の価格推移に依存し、調達コスト g の影響で価格が突然ジャンプする。この結果、規則性が弱く、ボラティリティが大きく変動する不安定な解軌道となる。これが「三角もち合い」に相当する。

一方、m が小さい (確信が強い) 場合、すなわち $0 \leq m < 3/4$ の時、システムは limit cycle となり、調達コスト g の効果で、解軌道の水準は時間の推移とともに緩やかに変化していく。この結果、規則性が強くボラティリティが変動しない安定的な解軌道と なる。これがトレンドに相当する。

4 モデルの拡張と課題

システム (2) は、小グループの人数が 3 人しかいない、もっとも単純なケースのモデルであるが、実際の市場で情報共有するグループの人数 p はもっと多いかもしれない。任意の p におけるこのシス

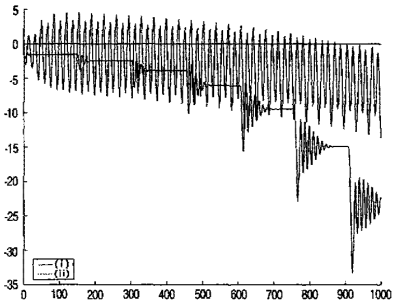

図 1: システム (2) による解軌道;　i(上)$= m < 3/4$, ii(下)$= m > 3/4$

テムの振る舞いは興味深い。また、このシステムでは、majority rule には完全に従う、すなわちその確率 μ は 1 であると仮定したが、これが変動するケースもありえる。この二つの要素を取り込むと、このシステムは次のように書き換えられる。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}x_k = -2mx_k + p\cdot 2\mu x_k z_k (\sum_{q=1}^{[p/2]} {}_{2q-1}\mathrm{C}_{q-1} z_k^{q-1}) - (y_k - y_{k-u})e^{ug} \tag{3a}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}y_k = p\cdot 2x_k\{(\sum_{q=1}^{[p/2]} {}_{2q-1}\mathrm{C}_{q-1} z_k^{q-1})(1-\mu) + 1\} \tag{3b}$$

ここで、$z_k = (\frac{1}{2} + x_k)(\frac{1}{2} - x_k)$ である。システム (3) は van der Pol システムではないが、不動点周りの漸近安定性分析により、自励振動子であることがわかる。すなわち、任意のランダムピックアップ数でも自励振動子モデルが成立する。majority rate(μ) が小さくなると負性抵抗領域が縮小し、p が増えるとこの領域が増大する。また、各パラメータに依存して $(0, y_{k-u})$ 以外にも不動点が複数発生する。このため、この一般化されたシステムでは解軌道がさらに複雑になる可能性がある。

この自励振動子システムは決定論的なモデルだが、実際の市場で検証する時は、価格を変動させる情報が外力として加えられる確率論的なモデルで考えることとなる。この時、mutation rate や majority rate を確率変数として推定対象とすれば、市場の安定性に関する情報が得られると考える。

参考文献

[1] H. Takahashi and Y. Itoh, Eur. Phys. J. B **37**, (2004), 271-274.

[2] T. Yamashita and Y .Itoh, Physica A, **374**, (2007), 764-772.

[3] W. DeBondt and R. H. Thaler, J. of Finance, **40**, (1996), 793.

[4] A. Devenow and I. Welch, Eur. Economic Review **40**, Apr (1996), 603.